

具有多参数恒 Lyapunov 指数谱的新型统一混沌系统

万求真^{1,2}, 周昭腾^{1,2}

(1. 湖南师范大学信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410081; 2. 智能计算与语言信息处理湖南省重点实验室, 湖南 长沙 410081)

摘 要: 基于传统的 Qi 混沌系统, 通过增加控制参数和改变非线性项相结合的方法构造了一种具有复杂混沌特性的新型统一混沌系统。首先, 分析了所提系统的动力学行为, 数值仿真了相图、时域波形图、Poincare 截面图和功率谱图; 其次, 讨论了系统参数变化时 Lyapunov 指数谱、分岔图和混沌信号幅度对整个系统的影响, 分析表明, 所提统一混沌系统能产生 4 种新的具有多参数恒 Lyapunov 指数谱特性的双翼混沌吸引子, 并存在多种全局和局部的非线性调幅参数; 再次, 以所提系统的第一种混沌吸引子为例, 引入 2 种新的非线性函数, 实现了网格多翼的扩展; 最后, 搭建所提统一混沌系统的硬件电路, 实验观察到 4 种新混沌吸引子, 与数值仿真结果一致, 验证了所提系统的可行性。

关键词: 统一混沌系统; 恒 Lyapunov 指数谱; 混沌吸引子

中图分类号: O231.2

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2020080

Novel unified chaotic system with multi-parameter invariable Lyapunov exponent spectrum

WAN Qiuzhen^{1,2}, ZHOU Zhaoteng^{1,2}

1. College of Information Science and Engineering, Hunan Normal University, Changsha 410081, China

2. Provincial Key Laboratory of Intelligent Computing and Language Information Processing, Changsha 410081, China

Abstract: Based on the traditional Qi chaotic system, a novel unified chaotic system with the complex chaotic characteristics was constructed by adding the control parameters and modifying the nonlinear terms. Firstly, basic dynamical characteristics of chaotic system were analyzed, and phase portrait, time domain waveform diagram, Poincare mapping and power spectrum diagram were numerically simulated. Secondly, system parameters influence on chaotic system was discussed through Lyapunov exponent spectrum, bifurcation diagrams and chaotic signal amplitude. It was found that the unified chaotic system can generate the four new types of two-wing chaotic attractors with the multi-parameter invariable Lyapunov exponent spectrum characteristics. Meanwhile, there exist the functions of the global and local nonlinear amplitude modulation parameters. Thirdly, taking the first chaotic attractor of system as an example by introducing the two new types of nonlinear functions, the expansion of grid multi-wing attractor was realized. Finally, the hardware circuit of novel unified chaotic system was constructed. The four new types of chaotic attractors are observed experimentally, which is consistent with numerical simulation results and verified the feasibility of the proposed system.

Keywords: unified chaotic system, invariable Lyapunov exponent spectrum, chaotic attractor

1 引言

混沌作为一种独特的非线性现象, 一直受到广

泛关注。早期被提出并且具有代表性的三维自治混沌系统有 Lorenz 系统^[1]、Chen 系统^[2]、Lyu 系统^[3]、Liu 系统^[4]和 Qi 系统^[5]等。随着对混沌系统研究的

收稿日期: 2019-09-09; 修回日期: 2020-03-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61901169); 湖南省自然科学基金资助项目 (No.2019JJ40190); 国家大学生创新创业训练计划基金资助项目 (No.201910542049)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61901169), The Natural Science Foundation of Hunan Province (No.2019JJ40190), National Students' Platform for Innovation and Entrepreneurship Training Program (No.201910542049)

不断深入, 近年来, 许多不同类型的新混沌系统相继被发现, 如多翼混沌系统^[6-8]、多涡卷混沌系统^[9-10]、超混沌系统^[11-12]、分数阶系统^[13]等。这些系统的混沌特性大多受限于系统参数的变化范围, 系统参数的小幅度变化或误差经常改变混沌系统的动力学特性, 其动力学行为会在稳定点、周期运动、拟周期运动、混沌运动以及超混沌运动状态中发生演变, 给混沌系统的实际应用带来困难。

为了使系统参数在一定范围内变化时不会影响系统本身的混沌特性, 即系统具有很强的稳健混沌特性, 一类新的恒 Lyapunov 指数谱混沌系统^[14-17]被提出。文献[14]在归一化 Colpitts 系统方程的基础上, 用分段线性的绝对值项代替非线性指数项, 得到一个恒 Lyapunov 指数谱混沌系统, 该系统的正 Lyapunov 指数呈现与某个特定参数无关, 而信号幅值随之线性改变的重要特性, 其正 Lyapunov 指数为 0.098 2。文献[15]在 Sprott 混沌系统的基础上, 采用增加控制参数的方法实现了对系统的恒 Lyapunov 指数谱混沌锁定, 它可以方便地实现混沌输出信号的幅度和相位控制, 但其正 Lyapunov 指数仅为 0.035。文献[16-17]在 Lorenz 系统或 Qi 系统的基础上, 改变原系统方程的部分结构, 得到一类新的恒 Lyapunov 指数谱混沌系统, 这类系统存在特殊作用的调幅参数与倒相参数。上述新混沌系统的不断发现和构造, 赋予了系统更大的参数变化空间与演变自由度, 可以很好地实现信号幅度的拉伸、缩小或者相位的反转, 而不需要增加硬件电路。然而, 上述文献大多是具有单参数或者双参数恒 Lyapunov 指数谱的混沌系统, 有关多参数恒 Lyapunov 指数谱混沌系统的报道很少, 同时上述恒 Lyapunov 指数谱混沌系统的正 Lyapunov 指数普遍较低, 表明系统运动的随机特性较弱, 不利于其在混沌雷达、图像加密和保密通信等领域^[18]的广泛应用。

基于此, 本文在传统 Qi 系统的基础上, 通过增加控制参数和改变非线性项相结合的方法构造了一种具有较大正 Lyapunov 指数和多参数恒 Lyapunov 指数谱特性的新型统一混沌系统。所提系统包含 2 个交叉乘积项和一个可变非线性项, 通过研究该系统的动力学行为, 分析系统的平衡点, 得到了系统的数值仿真结果, 并讨论了系统参数改变时 Lyapunov 指数谱、分岔图和混沌信号幅度的变

化曲线。研究发现, 所提统一混沌系统能产生 4 种新的三参数恒 Lyapunov 指数谱的双翼混沌吸引子, 且包含多种全局和局部的非线性调幅参数。当 $c=0$ 时, 该系统能产生 2 种新混沌吸引子, 并具有关于参数 a 、 e 和 g 的恒 Lyapunov 指数谱特性; 当 $a=0$ 时, 该系统能产生另外 2 种新混沌吸引子, 并具有关于参数 c 、 e 和 g 的恒 Lyapunov 指数谱特性。以所提系统的第一种混沌吸引子为例, 通过引入偶对称多分段二次型函数和平移变换函数, 可以实现网格多翼的扩展。最后, 搭建了所提新型统一混沌系统的硬件电路, 实验观察结果与数值仿真结果一致。

2 新型统一混沌系统的基本分析

2.1 新型统一混沌系统模型

本文提出的统一混沌系统的数学模型如式(1)所示。

$$\begin{cases} \dot{x} = ay - bx + cyz \\ \dot{y} = dy - exz \\ \dot{z} = -hz + gf(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

其中, x 、 y 、 z 均为系统的状态变量, a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 h 、 g 均为实常数, $f(x, y)$ 为 y^2 或 x^2 或 xy 。当 $a=25$, $b=25$, $c=0$, $d=16$, $e=1$, $h=6$, $g=1$, $f(x, y)=y^2$ 时, 系统产生第一种新双翼混沌吸引子; 当 $a=25$, $b=25$, $c=0$, $d=16$, $e=1$, $h=5$, $g=1$, $f(x, y)=x^2$ 时, 系统产生第二种新双翼混沌吸引子; 当 $a=0$, $b=-5$, $c=-1$, $d=-10$, $e=-1$, $h=2$, $g=1$, $f(x, y)=x^2$ 时, 系统产生第三种新双翼混沌吸引子; 当 $a=0$, $b=25$, $c=5$, $d=10$, $e=5$, $h=10$, $g=5$, $f(x, y)=xy$ 时, 系统产生第四种新双翼混沌吸引子。为叙述方便, 将这 4 种参数条件下的统一混沌系统分别简称为系统(1)、系统(2)、系统(3)和系统(4), 4 种混沌吸引子的相图如图 1 所示。特别地, 当 $c=0$, $b=a$, $f(x, y)=xy$ 时, 所提统一混沌系统退化成 Lyu 系统; 当 $a=0$, $f(x, y)=y^2$ 时, 系统退化成文献[17]提出的混沌系统。采用奇异值分解的方法可以计算出系统(1)~系统(4)的 3 个 Lyapunov 指数依次为 1.378、0.008 9、-16.379, 1.983、0.021 1、-15.989, 0.907 6、-0.016 4、-7.891, 3.208、0.024 9、-27.884。由于最大 Lyapunov 指数均为正数, 此时 4 种吸引子均处于混沌状态。

2.2 平衡点及其稳定性分析

对于系统(1), 当 $c=0$ 和 $f(x, y)=y^2$ 时, 令式(1)的

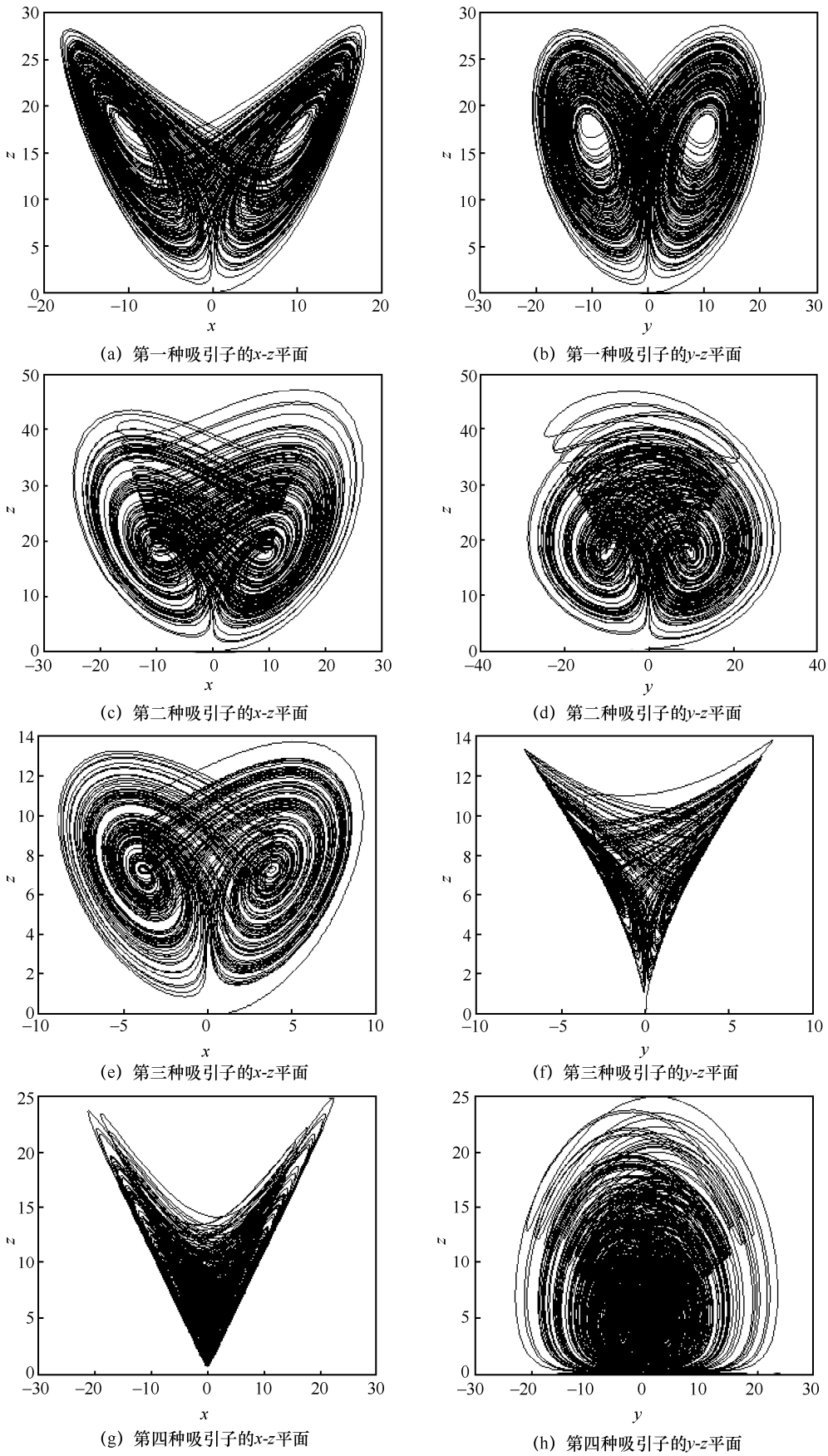


图 1 新型统一混沌系统的 4 种混沌吸引子相图

右边为零, 求得平衡点分别为

$$M_0 = (0, 0, 0)$$

$$M_1 = \left(\sqrt{\frac{adh}{beg}}, \sqrt{\frac{bdh}{aeg}}, \frac{bd}{ae} \right)$$

$$M_2 = \left(-\sqrt{\frac{adh}{beg}}, -\sqrt{\frac{bdh}{aeg}}, \frac{bd}{ae} \right)$$

由系统(1)的雅可比矩阵可得其特征多项式为

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0$$

其中, $B_0 = aehz + 2begxy - bdh$, $B_1 = bh - bd - dh + 2egxy + aez$, $B_2 = b + h - d$ 。当 $a=25$, $b=25$, $d=16$, $e=1$, $h=6$, $g=1$ 时, 系统(1)的 3 个平衡点分别为 $M_0=(0,0,0)$ 、 $M_1=(9.798, 9.798, 16)$ 和 $M_2=(-9.798, -9.798, 16)$ 。将 M_0 代入 $f_1(\lambda)$, 可得 3 个特征根分别为 $\lambda_1=-25$ 、 $\lambda_2=16$ 、 $\lambda_3=-6$; 同理可得, 平衡点 M_1 和 M_2 所对应的特征根分别为 $\lambda_1=-17.0661$ 、 $\lambda_2=1.033+16.739i$ 和 $\lambda_3=1.033-16.739i$ 。因此, 平衡点 M_0 是一个不稳定的鞍点, 非零平衡点 M_1 和 M_2 为指标 2 的不稳定鞍焦点, 系统(1)可以形成混沌吸引子的双翼。

对于系统(2), 采用类似系统(1)的分析方法。当 $c=0$ 和 $f(x,y)=x^2$, 且 $a=25$, $b=25$, $d=16$, $e=1$, $h=5$, $g=1$ 时, 系统(2)的 3 个平衡点分别为 $P_0=(0,0,0)$ 、 $P_1=(8.944, 8.944, 16)$ 和 $P_2=(-8.944, -8.944, 16)$ 。对于平衡点 P_0 , 其对应的特征根分别为 $\lambda_1=-25$ 、 $\lambda_2=16$ 、 $\lambda_3=-5$, 由于其特征根不全为正或负, 因此平衡点 P_0 是一个不稳定的鞍点。同理可得, 平衡点 P_1 和 P_2 所对应的特征根分别为 $\lambda_1=-20.9586$ 、 $\lambda_2=3.4793+13.3692i$ 和 $\lambda_3=3.4793-13.3692i$, 因为 λ_1 是负实数, λ_2 和 λ_3 都是实部为正的共轭复数, 所以非零平衡点 P_1 和 P_2 为指标 2 的不稳定鞍焦点, 系统(2)可以形成混沌吸引子的双翼。

对于系统(3), 当 $a=0$ 和 $f(x,y)=x^2$ 时, 令式(1)的右边等于零, 求得平衡点分别为 $N_0=(0,0,0)$, $N_1 =$

$$\left(\sqrt{\frac{h}{g}} \sqrt{\frac{bd}{ce}}, \sqrt{\frac{h}{g}} \sqrt{\frac{b^3e}{c^3d}}, \sqrt{\frac{bd}{ce}} \right), N_2 = \left(-\sqrt{\frac{h}{g}} \sqrt{\frac{bd}{ce}}, -\sqrt{\frac{h}{g}} \sqrt{\frac{b^3e}{c^3d}}, \sqrt{\frac{bd}{ce}} \right)$$

由系统(3)的雅可比矩阵可得特征多项式为

$$f_3(\lambda) = \lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_1\lambda + D_0$$

其中, $D_0 = cehz^2 + 2ceg^2z + 2cdgxy - bdh$, $D_1 = bh - bd - dh + cez^2 - 2cgxy$, $D_2 = b + h - d$ 。当 $b=-5$, $c=-1$, $d=-10$, $e=-1$, $h=2$, $g=1$ 时, 系统(3)的 3 个平衡点分别为 $N_0=(0,0,0)$ 、 $N_1=(3.761, 2.659, 7.071)$ 和 $N_2=(-3.761, -2.659, 7.071)$ 。将 N_0 代入 $f_3(\lambda)$, 可得其特征根分别为 $\lambda_1=5$ 、 $\lambda_2=-10$ 、 $\lambda_3=-2$; 同理可得, 平衡点 N_1 和

N_2 所对应的特征根分别为 $\lambda_1=-8.7759$ 、 $\lambda_2=0.8879+6.693i$ 和 $\lambda_3=0.8879-6.693i$ 。因此, 平衡点 N_0 是一个不稳定的鞍点, 非零平衡点 N_1 和 N_2 为指标 2 的不稳定鞍焦点, 系统(3)可以形成混沌吸引子的双翼。

对于系统(4), 当 $a=0$ 和 $f(x,y)=xy$, 且 $b=25$, $c=5$, $d=10$, $e=5$, $h=10$, $g=5$ 时, 系统(4)的 3 个平衡点分别为 $S_0=(0,0,0)$ 、 $S_1=(2, 3.162, 3.162)$ 和 $S_2=(-2, -3.162, 3.162)$ 。对于平衡点 S_0 , 其对应的特征根分别为 $\lambda_1=-25$ 、 $\lambda_2=-10$ 、 $\lambda_3=10$; 同理可得, 平衡点 $S_{1,2}$ 对应的特征根分别为 $\lambda_1=-33.7682$ 、 $\lambda_2=4.3841+16.6393i$ 和 $\lambda_3=4.3841-16.6393i$ 。因此, 平衡点 S_0 是一个不稳定的鞍点, 非零平衡点 S_1 和 S_2 为指标 2 的不稳定鞍焦点, 系统(4)可以形成混沌吸引子的双翼。

2.3 时域波形图、频谱图和 Poincare 截面图分析

以统一混沌系统中的系统(1)为例, 本节对其时域波形、功率谱和 Poincare 截面进行分析。系统(1)关于输出信号 x 的时域波形如图 2(a)所示, 其中实线代表系统的初始状态, 虚线代表系统的初始值发生微小改变后的状态。可以看到, 对于相同的系统结构, 即使初始值 x_0 前后仅相差 0.000 001, 其余值不变, 系统的波形也会在 8 s 后完全不同。系统(1)的功率谱如图 2(b)所示, 可以看出, 该系统具有连续的功率谱和较宽的序列频谱, 其性能较好。通过 Poincare 截面观察混沌系统的动力学特性, 分别选取截面 $x=0$ 和 $z=15$, 得到系统的 Poincare 截面如图 2(c)和图 2(d)所示, 可以看出, 截面上吸引子的叶片清晰可见, 进一步证明了系统(1)为混沌系统。

2.4 系统参数对新型统一混沌系统性能的影响

利用 LE (Lyapunov exponent) 谱图、分岔图和信号幅度变化曲线观察系统各参数变化时, 新型统一混沌系统对应的状态变化情况, 如图 3~图 9 所示。本节对 4 种不同参数条件下系统的 LE 谱和信号幅度变化情况进行讨论。图 3~图 9 中, S_{\max} 和 S_{\min} 分别表示信号幅度变化过程中的最大值和最小值。

1) 对于系统(1), 固定参数 $b=25$, $c=0$, $d=16$, $e=1$, $h=6$, $g=1$, 当 $a \in [0.1, 50]$ 时, 系统的 LE 谱图和信号幅度变化情况如图 3 所示。从图 3 可以看出, 随着参数 a 的变化, 系统的 LE 谱始终维持在 $LE_1=1.378$, $LE_2=0.0089$, $LE_3=-16.379$ 附近, 输出信号 x 的幅度随着参数 a 的增大而非线性增大, 但是 y 和 z 的幅度呈非线性减小。固定参数 $a=25$, $b=25$, $c=0$, $d=16$, $h=6$, $g=1$, 当 $e \in [0.1, 50]$ 时, 系统的 LE 谱图和信号幅度变化情况如图 4 所示。

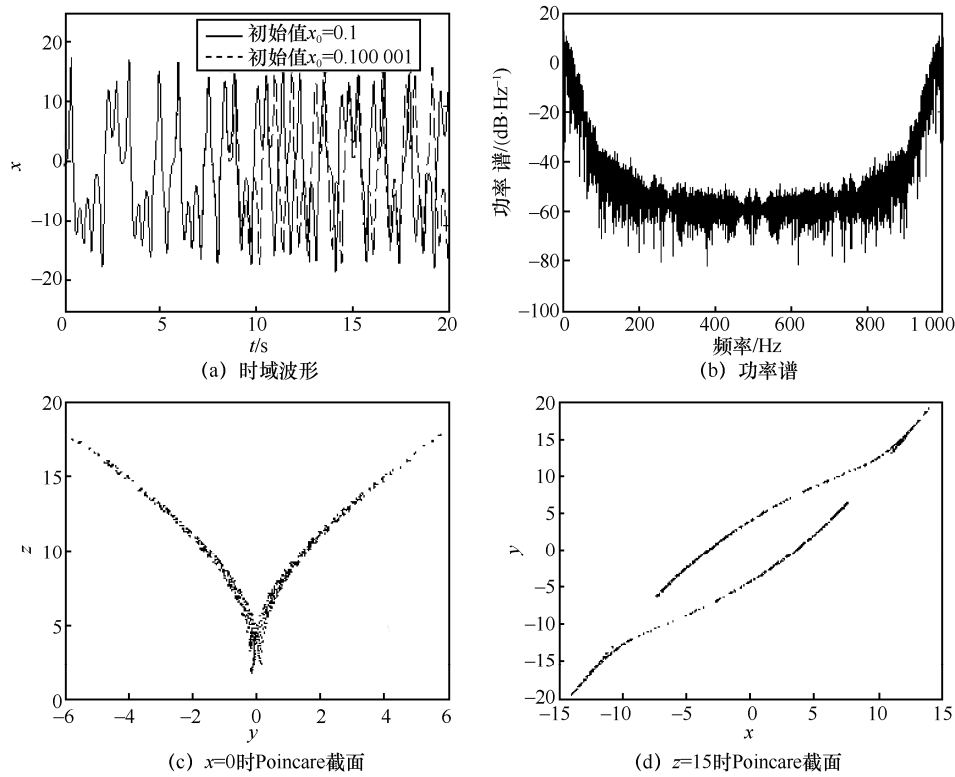


图 2 系统(1)数值仿真

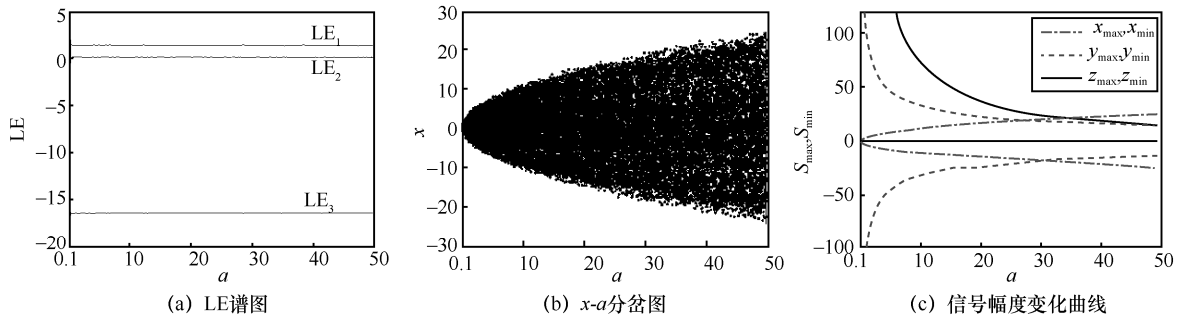


图 3 参数 a 变化时系统(1)的 LE 谱图和信号幅度变化情况.

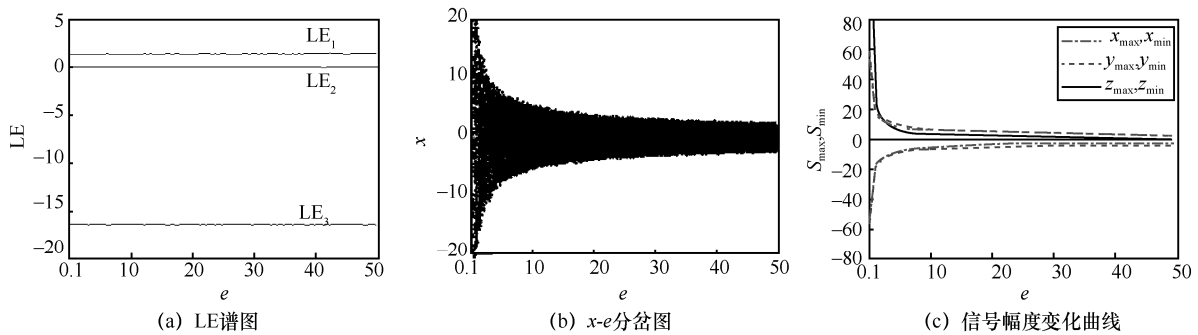


图 4 参数 e 变化时系统(1)的 LE 谱图和信号幅度变化情况

从图 4 可以看出, 随着参数 e 的变化, 系统的 LE 谱保持恒定, 输出信号 x 、 y 和 z 的幅度均随着参数 e 的增大而非线性减小。固定参数 $a=25$, $b=25$, $c=0$,

$d=16$, $e=1$, $h=6$, 当 $g \in [0.1, 50]$ 时, 系统的 LE 谱图和信号幅度变化情况如图 5 所示。从图 5 可以看出, 随着参数 g 的变化, 系统的 LE 谱保持恒定, 系

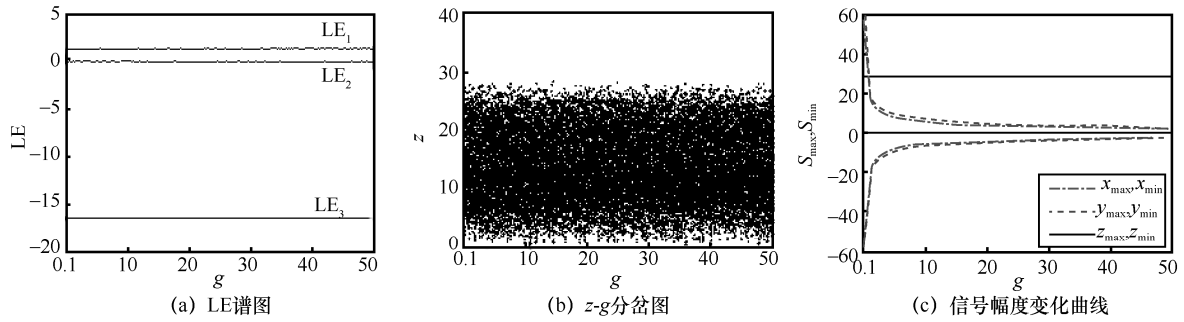


图 5 参数 g 变化时系统(1)的 LE 谱图和信号幅度变化情况

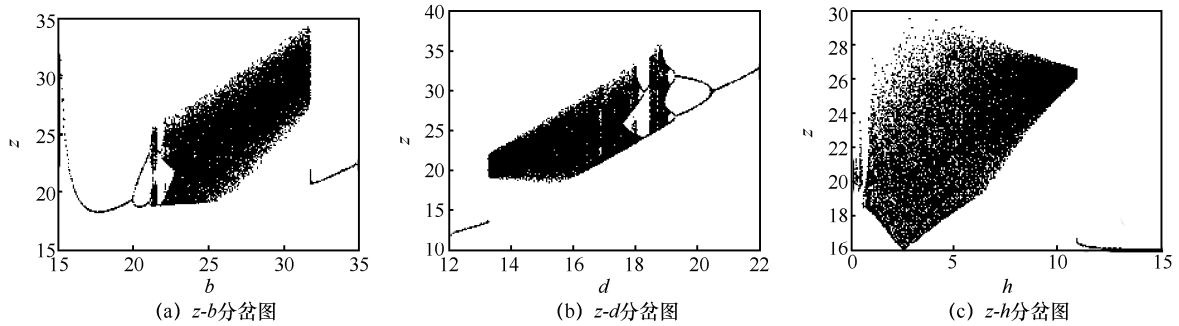


图 6 参数 b 、 d 和 h 变化时系统(1)的分岔图。

统的输出信号 x 和 y 的幅度随着参数 g 的增大而非线性减小，而 z 的幅度始终保持在一个固定的范围内。

对于系统(1)，固定其他系统参数不变，当参数 b 、 d 、 h 分别在 $[15,35]$ 、 $[12,22]$ 和 $[0,15]$ 区域内变化时，系统的分岔图如图 6 所示。从图 6 可以看出，随着参数 b 的变化，系统从周期运动形式通过倍周期分岔道路进入到混沌状态，最后演变为不动点的稳定状态；随着参数 d 的变化，系统从不动点的稳定状态跳变进入混沌状态，然后通过反向倍周期分岔演变为周期运动形式，且在混沌区域内可以发现最大 LE 为零的周期窗；随着参数 h 的变化，系统从大范围的混沌状态最后跳变为不动点的稳定状态。由图 3~图 6 可知，在所有的系统参数中，该系统的混沌特性对参数 a 、 e 和 g 具有很强的稳健性，即参数 a 、 e 和 g 在大范围变化时，系统始终处于恒 LE 谱的混沌状态；而参数 b 、 d 和 h 的小幅度变化都会使系统在稳定点、周期运动、拟周期运动和混沌运动中发生演变。

2) 对于系统(2)，采用类似系统(1)的分析方法，固定参数 $b=25$ ， $c=0$ ， $d=16$ ， $e=1$ ， $h=5$ ， $g=1$ ，当 $a \in [0.1,50]$ 时，系统的 LE 谱始终保持恒定，并分别维持在 $LE_1=1.983$ 、 $LE_2=0.0211$ 、 $LE_3=-15.989$ 附近，系统一直处于混沌状态，输出信号 x 、 y 和 z 的幅度都随着参数 a 的增大而非线性减小。固定参数 $a=25$ ， $b=25$ ， $c=0$ ， $d=16$ ， $h=5$ ， $g=1$ ，当 $e \in [0.1,50]$

时，系统的 LE 谱也保持恒定，此时输出信号 x 、 y 和 z 的幅度均随着参数 e 的增大而非线性减小。固定参数 $a=25$ ， $b=25$ ， $c=0$ ， $d=16$ ， $e=1$ ， $h=5$ ，当 $g \in [0.1,50]$ 时，系统的 LE 谱保持恒定，输出信号 x 和 y 的幅度随参数 g 的增大而非线性减小，而 z 的幅度一直保持在固定的范围内。

3) 对于系统(3)，固定参数 $a=0$ ， $b=-5$ ， $d=-10$ ， $e=-1$ ， $h=2$ ， $g=1$ ，当 $c \in [-50,-0.1]$ 时，系统的 LE 谱图和信号幅度变化情况如图 7 所示。可以看出，随着参数 c 的变化，系统的 LE 谱始终维持在 $LE_1=0.907$ ， $LE_2=-0.016$ ， $LE_3=-7.891$ 附近，其输出信号 x 、 y 和 z 的幅度随参数 c 的增大而非线性增大。固定参数 $a=0$ ， $b=-5$ ， $c=-1$ ， $d=-10$ ， $e=-1$ ， $h=2$ ， $g=1$ ，当 $e \in [-50,-0.1]$ 时，系统的 LE 谱图和信号幅度变化情况如图 8 所示。可以看出，随着参数 e 的变化，系统的 LE 谱也保持恒定，此时系统的输出信号 x 和 z 的幅度随参数 e 的增大而非线性增大，而 y 的幅度呈非线性减小。固定参数 $a=0$ ， $b=-5$ ， $c=-1$ ， $d=-10$ ， $e=-1$ ， $h=2$ ，当 $g \in [0.1,50]$ 时，系统的 LE 谱图和信号幅度变化情况如图 9 所示。可以看出，随着参数 g 的变化，系统的 LE 谱保持恒定，系统的输出信号 x 和 y 的幅度随参数 g 的增大而非线性减小，而 z 的幅度保持在固定范围内。

对于系统(3)，固定其他系统参数，当参数 b 、 d 、

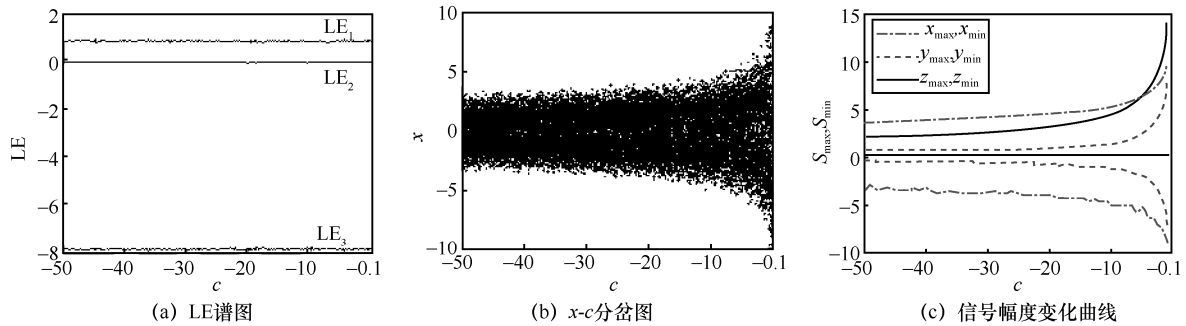


图 7 参数 c 变化时系统(3)的 LE 谱图和信号幅度变化情况。

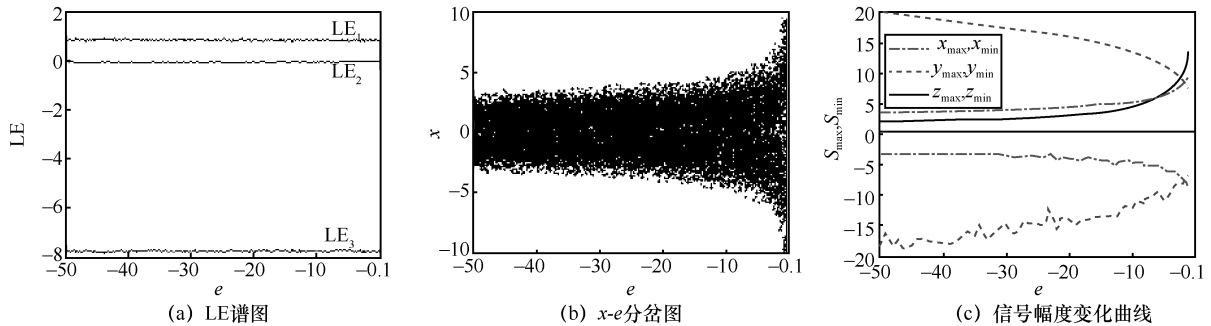


图 8 参数 e 变化时系统(3)的 LE 谱图和信号幅度变化情况

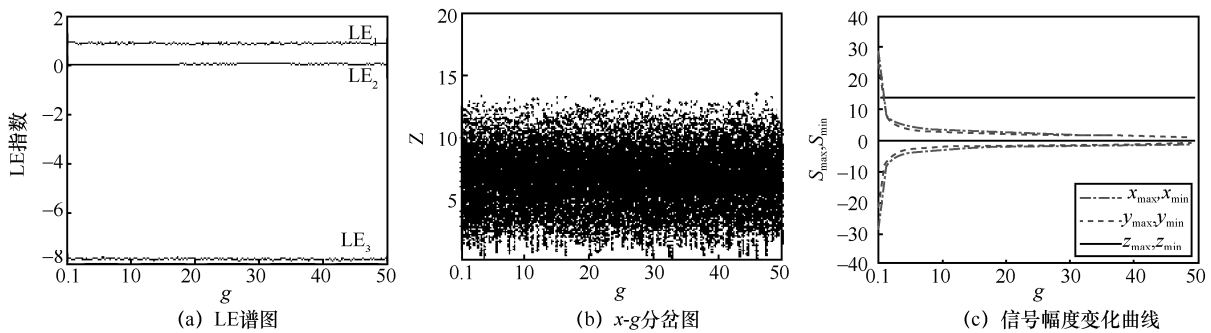


图 9 参数 g 变化时系统(3)的 LE 谱图和信号幅度变化情况

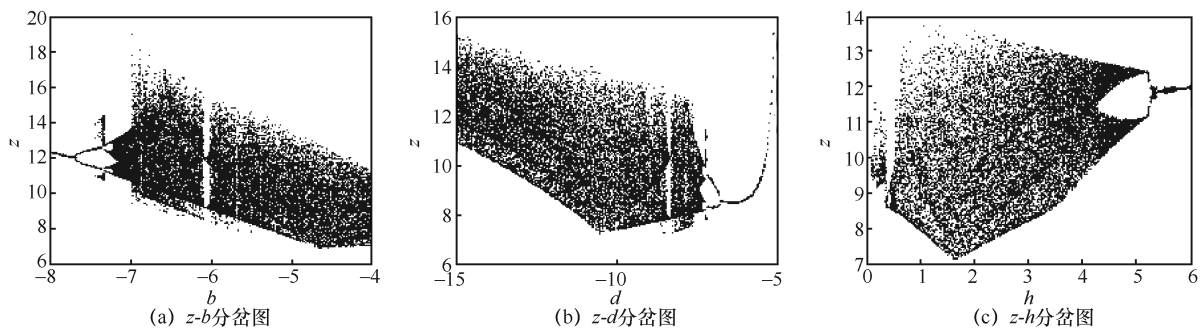


图 10 参数 b 、 d 和 h 变化时系统(3)的分岔图

h 分别在 $[-8,-4]$ 、 $[-15,-5]$ 和 $[0,6]$ 区间内变化时,系统的分岔图如图 10 所示。随着参数 b 的变化,系统从周期运动形式通过倍周期分岔进入到混沌状态,且在混沌区域内可发现最大 LE 为零的周期窗;随着参数 d 的变化,系统开始为混沌状态,随后通过反向倍周期分岔演变为周期运动形式;而随着参

数 h 的变化,系统从大范围的混沌状态最后跳变为不动点的稳定状态。

4) 对于系统(4),采用类似系统(3)的分析方法,固定参数 $a=0$, $b=25$, $d=10$, $e=5$, $h=10$, $g=5$, 当 $c \in [0.1,50]$ 时,系统的 LE 谱始终维持在 $LE_1=3.208$, $LE_2=0.0249$, $LE_3=-27.884$ 附近,其输出信号 y 和

z 的幅度随参数 c 的增大而非线性减小，而 x 的幅度随参数 c 的增大保持在同一个取值区间。固定参数 $a=0, b=25, c=5, d=10, h=10, g=5$ ，当 $e \in [0.1, 50]$ 时，系统的 LE 谱也保持恒定，此时系统的输出信号 x 和 z 的幅度随参数 e 的增大而非线性减小，而 y 的幅度保持在固定的范围内。固定参数 $a=0, b=25, c=5, d=10, e=5, h=10$ ，当 $g \in [0.1, 50]$ 时，系统的 LE 谱保持恒定，系统的输出信号 x 和 y 的幅度随参数 g 的增大而非线性减小，而 z 的幅度保持在固定范围内。

2.5 恒定 Lyapunov 指数谱特性分析

由上述分析可知，通过调整系统的部分参数，新型统一混沌系统能得到 4 种完全不同并且具有多参数恒 LE 谱特性的新双翼混沌吸引子。对于系统(1)，当参数 a, e 和 g 变化时，该系统的 LE 谱始终保持恒定即具有三参数恒 LE 谱特性，将系统的平衡点 M_0, M_1 和 M_2 代入特征多项式 $f_1(\lambda)$ 中时，会完全消除 a, e 和 g 。具体说明如下：将 M_0 代入 $f_1(\lambda)$ ，得到 $B_2=b+h-d, B_1=bh-bd-dh, B_0=-bdh$ ；将 M_1 或 M_2 代入 $f_1(\lambda)$ ，得到 $B_2=b+h-d, B_1=bh+dh, B_0=2bdh$ ，其对应的特征值与 a, e 和 g 均无关，因此，参数 a, e 和 g 不影响此系统在各点处的动力学特性，这 3 个参数发生变化时，系统(1)始终具有相同的 LE 谱。对于系统(2)，采用类似系统(1)的分析方法，可得出其也具有关于参数 a, e 和 g 的三参数恒 LE 谱特性，其对应的特征值与参数 a, e 和 g 均无关。对于系统(3)，其具有关于参数 c, e 和 g 的三参数恒 LE 谱特性；将 N_0 代入 $f_3(\lambda)$ 后，得到 $D_2=b+h-d, D_1=bh-bd-dh, D_0=-bdh$ ；将 N_1 或 N_2 代入 $f_3(\lambda)$ ，得到 $D_2=b+h-d, D_1=-bh-dh, D_0=4bdh$ ，其对应的特征值与参数 c, e 和 g 均无关。对于系统(4)，采用类似系统(3)的分析方法，可以得出其也具有关于参数 c, e 和 g 的三参数恒 LE 谱特性，其对应的特征值与 c, e 和 g 均无关。

2.6 非线性调幅特性分析

通过统一混沌系统的分岔图和信号幅度变化情况可知，系统(1)~系统(4)分别具有不同的非线性调幅特性。对于系统(1)，当参数 a, e 和 g 变化时，系统的输出信号幅度对应为全部或部分发生变化，其中 a, e 和 g 分别是全局、全局和局部非线性调幅参数。关于参数 a ，可以通过对该系统进行非线性变换，令 $x = \frac{x_1^*}{\sqrt{K}}, y = \sqrt{K}y_1^*, z = Kz_1^* (K > 0)$ ；关于参数 e ，令 $x = \sqrt{M}x_2^*, y = \sqrt{M}y_2^*, z = Mz_2^* (M > 0)$ ；关于

参数 g ，令 $x = \sqrt{N}x_3^*, y = \sqrt{N}y_3^*, z = z_3^* (N > 0)$ 。因为它们都代入数学模型式(1)后分别得到

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = aKy_1^* - bx_1^* \\ \dot{y}_1^* = dy_1^* - ex_1^*z_1^* \\ \dot{z}_1^* = -hz_1^* + gy_1^{*2} \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_2^* = ay_2^* - bx_2^* \\ \dot{y}_2^* = dy_2^* - eMx_2^*z_2^* \\ \dot{z}_2^* = -hz_2^* + gy_2^{*2} \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_3^* = ay_3^* - bx_3^* \\ \dot{y}_3^* = dy_3^* - ex_3^*z_3^* \\ \dot{z}_3^* = -hz_3^* + gNy_3^{*2} \end{cases} \quad (2)$$

因此，参数 a 和参数 e 都具有全局非线性调幅特性，其中系统输出信号 x, y 和 z 的幅度与参数 a 分别呈指数为 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 和 -1 的幂函数关系变化，而输出信号 x, y 和 z 的幅度与参数 e 分别呈指数为 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 和 -1 的幂函数关系变化；参数 g 具有局部非线性调幅特性，系统输出信号 x 和 y 的幅度与参数 g 分别呈指数为 $-\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的幂函数关系变化，但是输出信号 z 的幅度与参数 g 的变化无关。

另一方面，通过相图和时域波形图，也能分析系统(1)中当参数 a 变化时信号幅度的变化情况。 $a=1$ 和 $a=100$ 时系统(1)的相图与时域波形分别如图 11 和图 12 所示。由图 11 和图 12 可知，当参数 $a=100$ 时，系统(1)输出信号 x, y 和 z 的幅度分别为参数 $a=1$ 时的 10、0.1 和 0.01 倍，即信号 x, y 和 z 的幅度随参数 a 呈 $\sqrt{a}, \frac{1}{\sqrt{a}}$ 和 $\frac{1}{a}$ 关系变化（也即呈指数为 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 和 -1 的幂函数关系变化）。同时，这种全局非线性调幅特性也可以从图 3(b)和图 3(c)的分岔图与信号幅度变化曲线中看出。

采用类似的变换方法分析可得，对于系统(2)，其输出信号 x, y 和 z 的幅度与参数 a 分别呈指数为 $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ 和 -1 的幂函数关系变化；输出信号 x, y 和 z 的幅度与参数 e 分别呈指数为 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 和 -1 的幂函数关系变化；输出信号 x 和 y 的幅度与参数

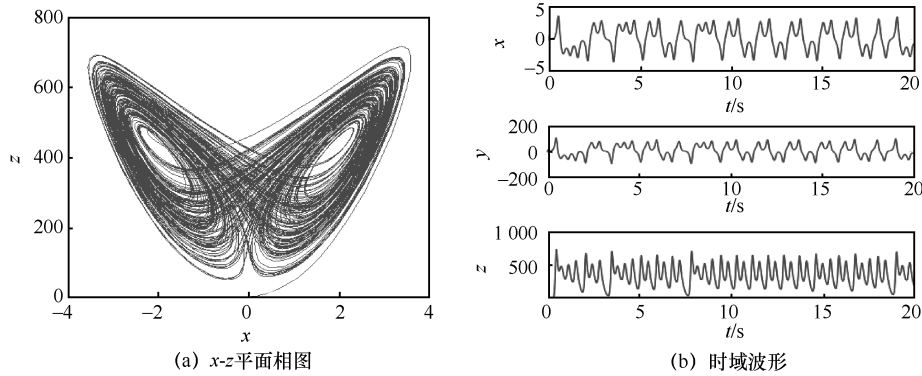


图 11 参数 $a=1$ 时系统(1)的相图与时域波形

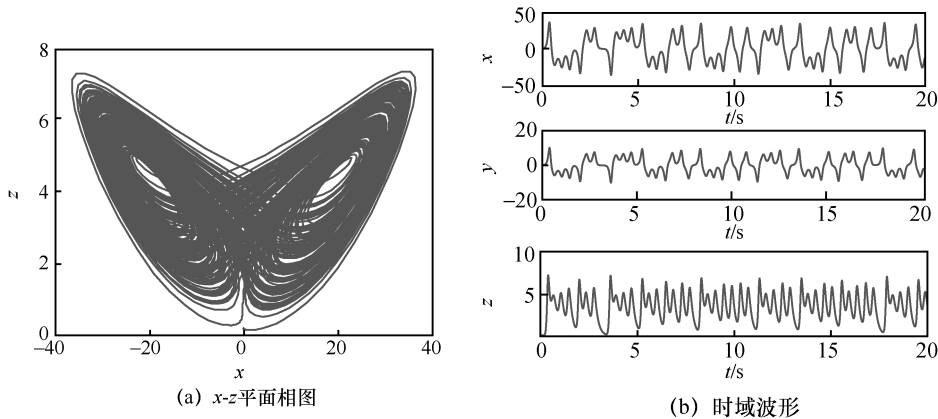


图 12 参数 $a=100$ 时系统(1)的相图与时域波形

g 分别呈指数为 $-\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的幂函数关系变化, 而 z 的幅度与 g 的变化无关, 因此参数 a 、 e 和 g 分别是全局、全局和局部非线性调幅参数。对于系统(3), 系统输出信号 x 、 y 和 z 的幅度与参数 c 分别呈指数为 $-\frac{1}{4}$ 、 $-\frac{3}{4}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的幂函数关系变化; 输出信号 x 、 y 和 z 的幅度与参数 e 分别呈指数为 $-\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{4}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的幂函数关系变化; 输出信号 x 和 y 的幅度与参数 g 分别呈指数为 $-\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的幂函数关系变化, 而 z 的幅度与 g 的变化无关, 因此参数 c 、 e 和 g 分别是全局、全局和局部非线性调幅参数。对于系统(4), 其输出信号幅度都对应为部分发生变化, 即系统的任意 2 种输出信号的幅度会随参数 c 、 e 和 g 呈指数为 $-\frac{1}{2}$ 的幂函数关系变化, 而另一个输出信号保持在固定的范围内, 因此参数 c 、 e 和 g 都是局部非线性调幅参数。

2.7 新型统一混沌系统的网格多翼扩展

与大多数的广义 Lorenz 混沌系统族一样, 统一混沌系统的 4 种吸引子也围绕指标 2 的鞍焦平衡点

演化而形成, 并且吸引子的相图都是关于 Z 轴对称。本节以统一混沌系统中第一种混沌吸引子为例来进行网格多翼扩展。将系统(1)中的可变非线性项变成一个新的参数可调的偶对称多分段二次函数 $F(y)$, 使其指标为 2 的鞍焦平衡点能在 y 方向上扩展, 同时在 z 方向上引入平移变换函数 $H(z)$, 于是系统(1)的数学模型变为

$$\begin{cases} \dot{x} = ay - bx \\ \dot{y} = dy - Pex(z - H(z)) \\ \dot{z} = -h(z - H(z)) + F(y) \end{cases} \quad (3)$$

其中,

$$F(y) = A_0 y^2 + 0.5 \sum_{i=1}^N A_i (\text{sgn}(y + E_i) - \text{sgn}(y - E_i) - 2) \quad (4)$$

$$H(z) = H_0 [\text{sgn}(z - B_1) + \text{sgn}(z - B_2)] - \sum_{j=1}^M [H_0 (1 - \text{sgn}(z + Z_j))] \quad (5)$$

其中, A_0 、 A_i 、 E_i 、 H_0 、 B_1 、 B_2 和 Z_j 为可调参数, 前三项共同调节函数 $F(y)$ 各段的斜率、幅度和宽度, 后四项控制函数 $H(z)$ 各段的幅度和宽度; N 、 M 和

P 分别为非线性函数中累加的项数和系统的伸缩因子, N, M 为正整数, $0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M, P$ 用于调节混沌吸引子相图的观察区域。令 $N=5$ 和 $M=6$, 取 $A_0=100, A_1=10, A_2=12, A_3=18, A_4=22, A_5=26$; $E_1=0.3, E_2=0.45, E_3=0.6, E_4=0.75, E_5=0.9; H_0=0.6$; $B_1=3.5, B_2=1.7, Z_1=0.9, Z_2=2.1, Z_3=3.3, Z_4=4.5, Z_5=5.7, Z_6=6.9$ 。选定 $P=18, a=25, b=25, d=16, e=1$ 和 $h=6$, 若分别取 $N=5, M=2; N=5, M=3; N=5, M=6$ 三组值时, 系统(1)对应的吸引子被扩展为 $12 \times 3, 12 \times 4, 12 \times 7$ 的网格多翼混沌吸引子, 其仿真结果如图 13 所示。

3 新型统一混沌系统的电路实验

新型统一混沌系统的电路仿真如图 14 所示, 图 14(a)实现系统(1)、系统(2)和系统(4)这 3 种混沌吸引子的切换, 图 14(b)实现系统(3)的混沌吸引子。

图 14 中的三路模拟运算电路分别实现该系统的状态变量 x, y 和 z , 模拟乘法器 AD633、运算放大器 LM741 及其外围元件用于实现系统的非线性项、反相和积分运算等。图 14(a)电路仿真中设置有

6 个开关 $S_1 \sim S_6$, 用于改变函数 $f(x, y)$ 选项以及实现参数 a 或 c 的置零。在图 14 中, 电源供电电压均为 $\pm 15V$, 运算放大器的容许电压为 $\pm 18V$, 模拟乘法器的容许电压仅为 $\pm 10V$, 而统一混沌系统三种输出信号的相图明显超出此电压范围, 故为了有效地进行电路实验, 将所有混沌输出信号的动态幅度进行线性比例压缩, 压缩为原来的 0.1 倍, 如式(6)所示, 再根据系统的电路图 14(a)和相关电路理论, 并考虑模拟乘法器 AD633 的放大倍数为 0.1, 得到式(7)。

$$\begin{cases} \dot{x} = ay - bx + 10cyz \\ \dot{y} = dy - 10exz \\ \dot{z} = -hz + 10gf(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{R_1 C_1} y - \frac{1}{R_2 C_1} x + \frac{1}{10 R_3 C_1} yz \\ \dot{y} = \frac{1}{R_4 C_2} y - \frac{1}{10 R_5 C_2} xz \\ \dot{z} = -\frac{1}{R_6 C_3} z + \frac{1}{10 R_7 C_3} f(x, y) \end{cases} \quad (7)$$

比较式(6)和式(7)可得

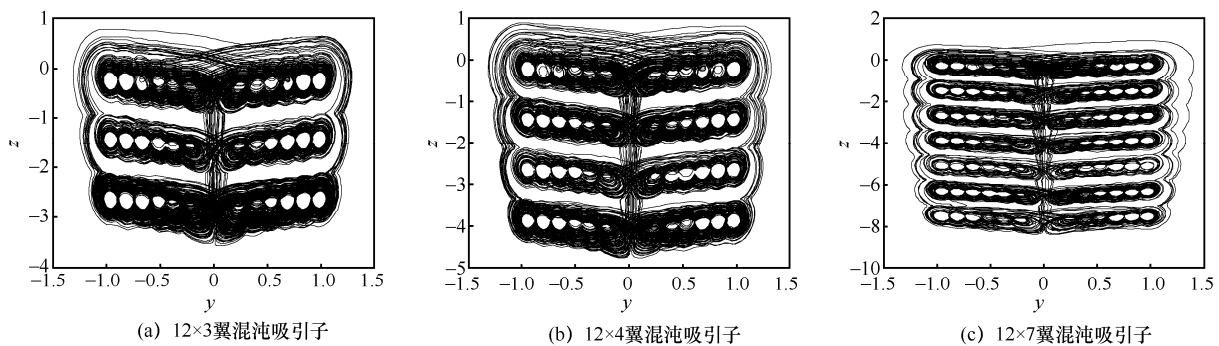


图 13 系统(1)的网格多翼混沌吸引子相图

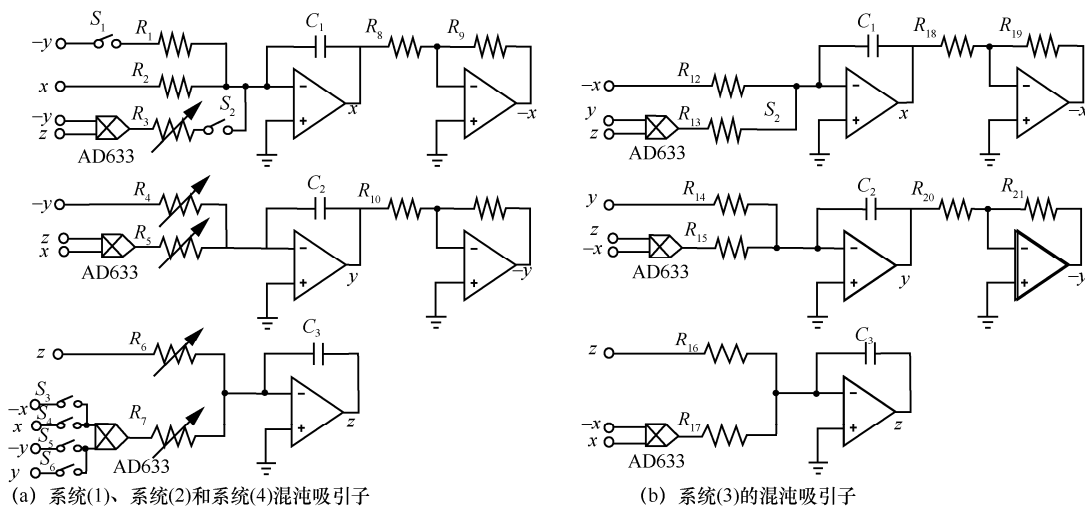


图 14 新型统一混沌系统电路仿真

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{R_1 C_1}, b = \frac{1}{R_2 C_1}, 10c = \frac{1}{10R_3 C_1} \\
 d &= \frac{1}{R_4 C_2}, 10e = \frac{1}{10R_5 C_2} \\
 h &= \frac{1}{R_6 C_3}, 10g = \frac{1}{10R_7 C_3}
 \end{aligned} \tag{8}$$

令 $C_1=C_2=C_3=1 \mu\text{F}$, 对于系统(1), 当 $a=25, b=25, c=0, d=16, e=1, h=6$ 和 $g=1$ 时, 可得到电路中各电阻理想精确值为 $R_1=R_2=40 \text{ k}\Omega, R_4=62.5 \text{ k}\Omega, R_6=166.67 \text{ k}\Omega, R_5=R_7=10 \text{ k}\Omega$, 取 $R_8=R_9=R_{10}=R_{11}=10 \text{ k}\Omega$, 同时仅闭合开关 $S_1、S_5$ 和 S_6 。对于系统(2), 当 $a=25, b=25, c=0, d=16, e=1, h=5$ 和 $g=1$ 时, 只需令 $R_6=200 \text{ k}\Omega$, 同时仅闭合开关 $S_1、S_3$ 和 S_4 , 而其他元件值均不变; 对于系统(4), 当 $a=25, b=25, c=5, d=10, e=5, h=10$ 和 $g=6$ 时, 只需令 $R_3=2 \text{ k}\Omega, R_4=100 \text{ k}\Omega, R_5=R_7=2 \text{ k}\Omega, R_6=100 \text{ k}\Omega$, 同时仅闭合开关 $S_2、S_4$ 和 S_5 , 而其他元件值均不变。对于系统(3), 根据图 14(b)和相关电路理论, 当 $a=0, b=-5, c=-1, d=-10, e=-1, h=2, g=1$ 时, 可以得到各电阻理想值为 $R_{12}=200 \text{ k}\Omega, R_{14}=100 \text{ k}\Omega, R_{16}=500 \text{ k}\Omega, R_{13}=R_{15}=R_{17}=R_{18}=R_{19}=R_{20}=R_{21}=10 \text{ k}\Omega$ 。采用 EM6506 双通道模拟示波器来观察实验电路, 可以得到统一混沌系统的 4 种新双翼混沌吸引子的电路实验结果如图 15 所示。从图 15 中可以看出, 电路实验的结果和数值仿真的结果相一致, 验证了本文提出的新型统一混沌系统的可行性。

4 结束语

本文提出了一种具有较大正 Lyapunov 指数和多参数恒 Lyapunov 指数谱的新型统一混沌系统, 深入研究了该系统的基本动力学行为, 分析了该系统在不同参数条件下的恒 LE 谱和非线性调幅特性, 同时对第一种混沌吸引子进行了网格多翼扩展, 最后设计模拟实验电路对统一混沌系统进行了实验验证, 电路实验的结果与数值仿真结果相一致, 表明该系统的可行性。可得如下结论。

1) 新型统一混沌系统的数学模型是一个包含 4 种完全不同的新双翼混沌吸引子的三维自治常微分方程。通过大范围改变系统参数, 所提系统产生的 4 种新双翼混沌吸引子都具有三参数恒 LE 谱特性, 相对应的混沌吸引子均呈现出很好的稳健混沌状态。

2) 新型统一混沌系统具有复杂的混沌特性和动力学行为, 其中系统(1)~系统(3)都包含 2 个全局非线性调幅参数和一个局部非线性调幅参数, 并且具有不同的非线性调幅功能, 而系统(4)包含 3 个局部非线性调幅参数。

3) 通过引入 2 种合适的非线性函数, 可以将系统(1)的双翼混沌吸引子扩展成具有网格状多翼的混沌吸引子, 与原吸引子相比, 新的网格多翼混沌吸引子的结构更加复杂。

4) 新型统一混沌系统进一步拓展了恒

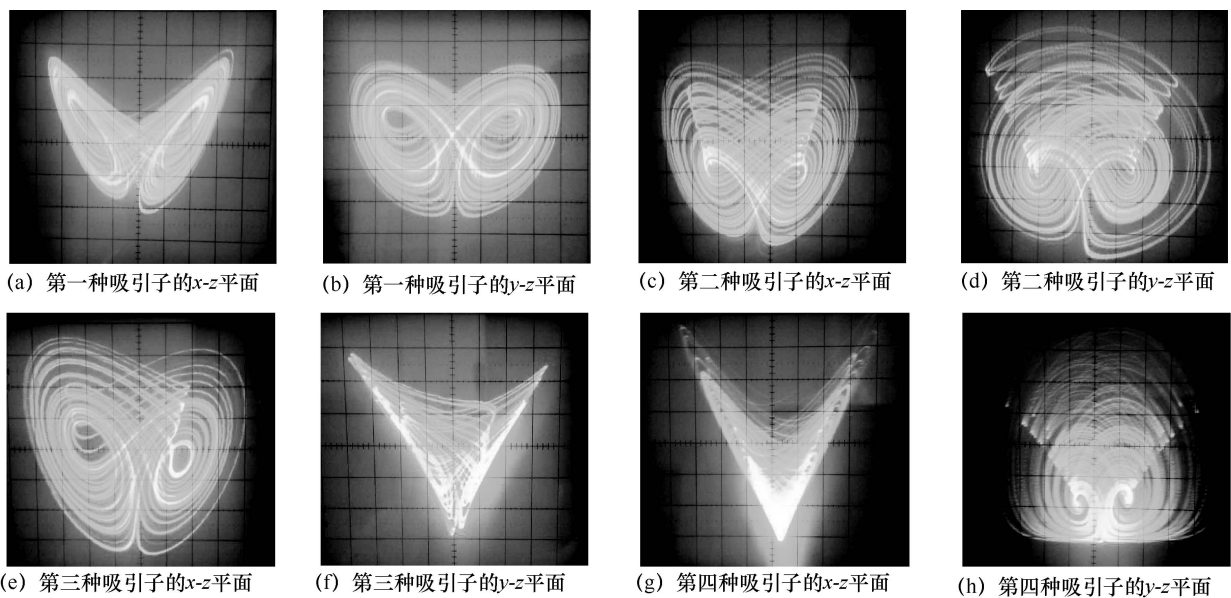


图 15 新型统一混沌系统的 4 种新混沌吸引子的电路实验结果

Lyapunov 指数谱混沌系统族, 它可用硬件电路来实现, 该系统的混沌特性表明其在混沌雷达、图像加密和保密通信等领域中有潜在应用价值。

参考文献:

- [1] STEWART I. The Lorenz attractor exists[J]. Nature, 2000, 406: 948-949.
- [2] CHEN G R, TETSUSHI U. Yet another chaotic attractor[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1999, 9(7): 1465-1466.
- [3] LYU J H, CHEN G R. A new chaotic attractor COINED[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(3): 659-661.
- [4] LIU C X, LIU T, LIU L, et al. A new chaotic attractor[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2004, 22(5): 1031-1038.
- [5] QI G Y, CHEN G R, DU S Z, et al. Analysis of a new chaotic system[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2005, 352(2): 295-308.
- [6] ZHOU L, WANG C H, ZHOU L L. Generating four-wing hyperchaotic attractor and two-wing, three-wing, and four-wing chaotic attractors in 4D memristive system[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2017, 27(2): 1750027.
- [7] YU N, WANG Y W, LIU X K, et al. 3D grid multi-wing chaotic attractors[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2018, 28(4): 1850045.
- [8] ZHANG C X, YU S M. A novel methodology for constructing a multi-wing chaotic and hyperchaotic system with a unified step function switching control[J]. Chinese Physics B, 2016, 25(5): 050503.
- [9] 毛学志, 徐勇, 刘建平, 等. 基于反正切的网格混沌吸引子及其保密通信[J]. 通信学报, 2014, 35(12): 106-115.
MAO X Z, XU Y, LIU J P, et al. Grid chaotic attractors based on arc tangent and its secure communication[J]. Journal on Communications, 2014, 35(12): 106-115.
- [10] 马均澎, 王丽丹, 段书凯, 等. 拉伸式 3-D 多涡卷混沌系统的设计及其在保密通信中的应用[J]. 通信学报, 2016, 37(12): 142-155.
MA J P, WANG L D, DUAN S K, et al. Design of a tensile-type 3-D multi-scroll chaotic system and its application in secure communication[J]. Journal on Communications, 2016, 37(12): 142-155.
- [11] WU H G, YE Y, BAO B C, et al. Memristor initial boosting behaviors in a two-memristor-based hyperchaotic system[J]. Chaos Solitons and Fractals. 2019, 121: 178-185.
- [12] ZHOU L, WANG C H, ZHOU L L. A novel no-equilibrium hyperchaotic multi-wing system via introducing memristor[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2018, 46(2): 84-98.
- [13] WANG H H, SUN K H, HE S B. Characteristic analysis and DSP realization of fractional-order simplified Lorenz system based on Adomain decomposition method[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2015, 25(6): 1550085.
- [14] 李春彪, 王德纯. 一种恒 Lyapunov 指数谱混沌吸引子及其 Jerk 电路实现[J]. 物理学报, 2009, 58(2): 764-770.
LI C B, WANG D C. An attractor with invariable Lyapunov exponent spectrum and its Jerk circuit implementation[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(2): 764-770.
- [15] 李春彪, 徐克生, 胡文. Sprott 系统的恒 Lyapunov 指数谱混沌锁定及其反同步[J]. 物理学报, 2011, 60(12): 74-84.
LI C B, XU K S, HU W. Sprott system locked on chaos with constant Lyapunov exponent spectrum and its anti-synchronization[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(12): 74-84.
- [16] 周小勇. 一个新混沌系统及其电路仿真[J]. 物理学报, 2012, 61(3): 71-79.
ZHOU X Y. A novel chaotic system and its circuit simulation[J]. ACTA PHYSICA SINICA, 2012, 61(3): 71-79.
- [17] LI C L, LI H M, TONG Y N. Analysis of a novel three-dimensional chaotic system[J]. Optik - International Journal for Light and Electron Optics. 2013, 124(13): 1516-1522.
- [18] 闵富红, 王珠林, 曹弋, 等. 基于双曲函数的双忆阻器混沌电路多稳态特性分析[J]. 电子学报, 2018, 46(2): 486-494.
MIN F H, WANG Z L, CAO Y, et al. Multistability Analysis of a Dual-Memristor Circuit Based on Hyperbolic Function[J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(2): 486-494.

[作者简介]



万求真 (1984-), 男, 湖南岳阳人, 博士, 湖南师范大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为模拟/射频集成电路设计、非线性系统与电路设计。



周昭腾 (1993-), 男, 湖南长沙人, 湖南师范大学硕士生, 主要研究方向为混沌电路与系统设计、忆阻器与忆阻系统。

《通信学报》第九届编辑委员会

主任委员：方滨兴

常务副主任委员：张 平

副主任委员：陆建华 张延川 衣雪青 马建峰

 杨 震 杨晨阳 彭长根 刘华鲁

委员：（按姓氏笔画排序）

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 丁 群 | 于 全 | 王万良 | 王汝言 | 王怀民 | 王良民 |
| 王佰玲 | 王晓阳 | 王新兵 | 韦乐平 | 龙 军 | 田 辉 |
| 田有亮 | 田俊峰 | 兰巨龙 | 朱洪波 | 仲 红 | 邬江兴 |
| 邬贺铨 | 刘 全 | 刘晓光 | 刘韵洁 | 李少谦 | 李风华 |
| 李建东 | 李陶深 | 杨盘隆 | 吴 俊 | 吴 巍 | 吴素萍 |
| 吴晓平 | 沙学军 | 沈庆国 | 沈连丰 | 张士兵 | 张云勇 |
| 张玉清 | 张更新 | 张钦宇 | 陈 兵 | 陈山枝 | 陈后金 |
| 陈兴蜀 | 范九伦 | 林金朝 | 欧阳缮 | 易东山 | 罗 娟 |
| 罗军舟 | 周一青 | 孟洛明 | 桂 冠 | 贾 焰 | 钱志鸿 |
| 徐立中 | 郭 磊 | 黄传河 | 黄梦醒 | 崔江涛 | 章献民 |
| 隆克平 | 韩国强 | 蔡 康 | 裴庆祺 | 谭国真 | 魏蛟龙 |

Kwang-Cheng Chen（南佛罗里达大学）

Shu-Guang Cui（加州大学）

Tom Hou（弗吉尼亚理工大学）

Yi Qian（内布拉斯加大学）